

2027 年 EGMO 競賽初選考試 初選考試試題

考試時間：2026 年 9 月 19 日上午 10:00 ~ 12:00

一般性資訊：

- 本試題共三頁（含本頁），共十六題。
- 題目分成四個領域：代數、組合、幾何與數論。各領域的四道題目大致依照其在領域內的難度順序排列。
- 各題皆獨立計分；答題時**不需**依照題號順序作答。

注意事項：

- 請用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 填答時，若答案的數字位數少於填答空格數時，請適當地在前面填入 0。
- 填答時，若答案為分數，請以最簡分數作答。
- 未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案，或未使用藍、黑色原子筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認答案者，其後果由考生自行承擔。
- 不得使用量角器、計算器及其他電子設備。
- 答案卷每人一張，不得要求增補。

一、代數

1. 若正實數 x, y, z 滿足 $x + y + z = 2$ ，則 $x^2 + 2y^2 + 3z^2$ 的最小可能值為 $\frac{\textcircled{1}\textcircled{2}}{\textcircled{3}\textcircled{4}}$ 。
2. 若實數多項式 $P(x)$ 的次數大於零，且 $P(P(x)) = (x^2 + x + 1)P(x)$ 對於所有實數 x 皆成立，則 $P(10) = \underline{\textcircled{5}\textcircled{6}\textcircled{7}}$ 。
3. 實數數列 $x_0, x_1, \dots$ 滿足 $x_0 = 0$ 且 $|x_k| = |x_{k-1} + 3|$ 對於所有 $k \geq 1$ 皆成立。則 $|x_1 + x_2 + \dots + x_{100}|$ 的最小可能值為 $\underline{\textcircled{8}\textcircled{9}}$ 。
4. 若函數 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 滿足 $f(2) = 3$ ，且

$$xf(y) - yf(x) = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

對於所有 $x, y \neq 0$ 皆成立，則 $f(10) = \frac{\textcircled{10}\textcircled{11}}{\textcircled{12}}$ 。(化為最簡分數)

二、組合

1. 有 1 到 6 號的球各一顆。寶寶將這些球排成一橫列，並且將其中的 3 顆球塗色。路過的奶爸一看，發現有塗色的三顆球由左至右形成遞增數列，沒塗色的三顆球由左至右也形成遞增數列。則寶寶共有 $\underline{\textcircled{13}\textcircled{14}\textcircled{15}}$ 種將其排列與塗色的方式。
2. 考慮所有由 0 和 1 所組成的數列 $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ 。令 O 是這些數列中，有多少條數列讓 $S = x_1x_2 + x_3x_4 + \dots + x_9x_{10}$ 是奇數，而 E 則是這些數列中有多少條數列讓 S 是偶數。則 $\frac{O}{E} = \frac{\textcircled{16}\textcircled{17}}{\textcircled{18}\textcircled{19}}$ 。(化為最簡分數)
3. 有 100 間房間，其中若干對房間之間恰有一扇雙向門，使得我們可以從任一個房間經過若干扇門達到任何其他房間。已知共有 99 扇門，且每間房間都有奇數扇門。則恰有 3 扇門的房間數的最大可能值為 $\underline{\textcircled{20}\textcircled{21}}$ 。
4. 坐標平面上有八個相異的點 $A_1, A_2, \dots, A_8$ 。對任意實數 θ ，將這八個點以原點為中心逆時針旋轉 θ 角。若旋轉後八個點的 x -座標皆互不相同，則依其 x -座標由小到大排列；若所得順序為 $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_8}$ ，則稱角度 θ 產生排列 $(i_1, i_2, \dots, i_8)$ 。則當 θ 取遍所有實數，我們最多可以產生 $\underline{\textcircled{22}\textcircled{23}\textcircled{24}}$ 種不同的排列。

三、幾何

1. 在三角形 $\triangle ABC$ 中， $AB = 30$ ， $AC = 24$ ，而 $BC = 36$ 。點 D 在邊 $\overline{BC}$ 上，且 AD 為 $\angle BAC$ 的角平分線。過 D 作一直線，分別交直線 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 於 E 、 F 。若 $AE = 20$ ，則 $CF = \underline{\textcircled{25} \textcircled{26}}$ 。
2. 三角形 ABC 的三邊長分別為 $\overline{AB} = 5$ ， $\overline{AC} = 7$ ， $\overline{BC} = 9$ 。設 $\angle A$ 的內角平分線與三角形 ABC 的外接圓再交於點 D 。則 $\overline{AD} = \underline{\textcircled{27} \sqrt{\textcircled{28}}}$ 。(化為最簡根式)
3. 兩圓 ω_A 與 ω_B 分別以 A, B 為圓心，半徑分別為 3 與 6，且兩圓外切。從點 B 向圓 ω_A 作切線，切點為 C 。在圓 ω_B 上取一點 D ，使得 AC 平行 BD ，且線段 BC 與 AD 不相交。線段 AD 與圓 ω_A 再交於 E 。直線 BE 與圓 ω_A 再交於另一點 F 。則 EF 的長度為 $\underline{\textcircled{29} \sqrt{\textcircled{30}}}$ 。(化為最簡根式。)
4. 在凸五邊形 $ABCDE$ 中， $AE = AD$ ， $AB = AC$ ，且 $\angle CAD = \angle AEB + \angle ABE$ 。若三角形 ABE 中，從 A 向邊 BE 所作的中線長為 12，則 $CD = \underline{\textcircled{31} \textcircled{32}}$ 。

四、數論

1. 令 n 為正整數。若 $n^2 + 100$ 為完全平方數，則 n 的最大可能值為 $\underline{\textcircled{33} \textcircled{34}}$ 。
2. 令 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 為一單射函數，使得 $f(xy) = f(x) \times f(y)$ 對於所有正整數 x 和 y 皆成立。則 $f(500)$ 的最小可能值為 $\underline{\textcircled{35} \textcircled{36}}$ 。
3. 若質數 $p > q$ 滿足 pq 整除 $(5^p - 2^p)(5^q - 2^q)$ ，則 p 的最大可能值為 $\underline{\textcircled{37} \textcircled{38}}$ 。
4. 令 n 為正整數。若對於所有滿足 $m^3 \leq n$ 的正整數 m ，都有 m 整除 n ，則 n 的最大可能值為 $\underline{\textcircled{39} \textcircled{40} \textcircled{41} \textcircled{42}}$ 。

2027 年 EGMO 競賽初選考試答案

代數	1. $\frac{24}{11}$	2. 110	3. 30	4. $\frac{99}{5}$
組合	1. 400	2. $\frac{31}{33}$	3. 49	4. 056
幾何	1. 16	2. $4\sqrt{5}$	3. $2\sqrt{3}$	4. 24
數論	1. 24	2. 72	3. 13	4. 0420