

2016年第17屆亞洲物理奧林匹亞競賽及 第47屆國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊初選考試

理論試題

2015年11月21日

13:30~16:30

考試時間：三小時

<<注意事項>>

- 1、本試題包括填充題三十格及計算題兩大題，合計總分為150分。
- 2、填充題部分，請直接將答案填入指定之答案格內，未填入指定之位置者不予計分。
- 3、計算題部分，請在答案卷上指定之位置作答。
- 4、可使用掌上型計算器。

2016 年第 17 屆亞洲物理奧林匹亞競賽
及第 47 屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊初選考試試題

※本試題含填充題和計算題兩部分，總分為 150 分，考試時間三小時。

壹、填充題(每格 4 分，共 30 格，合計 120 分)

- 一、一物體進行直線運動，其位置 x ，與時間 t 的關係為： $x = 4 + 7t - 2t^2$ 。圖 1 是速度與時間的作圖，則在 $0 \sim 2$ 秒間，該物體速度 $\vec{v}$ 與時間 t 的關係，可用圖 1 中 A、B、C 和 D 四條線的何者描述？(1)。(以 A、B、C 和 D 作答)

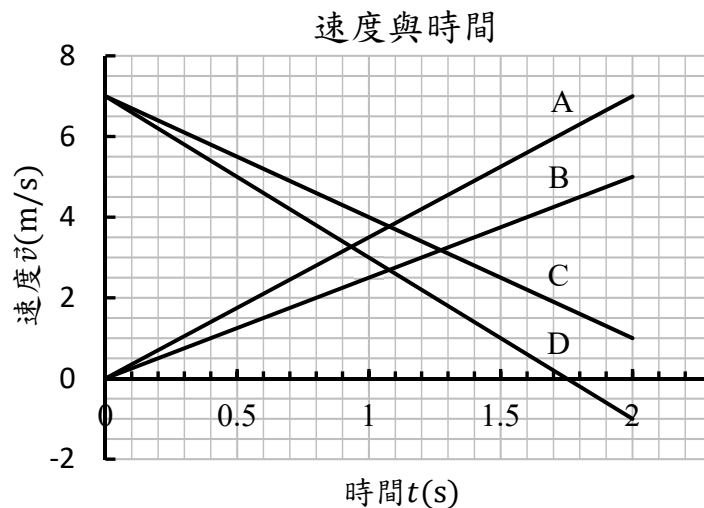


圖 1：速度對時間的作圖

- 二、將一個裝滿水之乒乓球由距離地面高度 1 公尺處自靜止釋放，乒乓球落地時反彈，依碰撞狀況，乒乓球會反覆地落下、反彈數次，直到靜止在地面上。圖 2 所示為該乒乓球在地面上幾次反彈過程中高度 y 和時間 t 之關係圖 $y(t)$ 。由靜止釋放後三秒內之平均速率為(2)。若乒乓球落下與反彈過程中之空氣阻力可忽略，則第一次碰撞時之恢復係數為(3)。(作答時取三位有效數字)

【註】：恢復係數(coefficient of restitution)是指當兩物體碰撞時，碰撞後與碰撞前兩物體相對速率之比值。

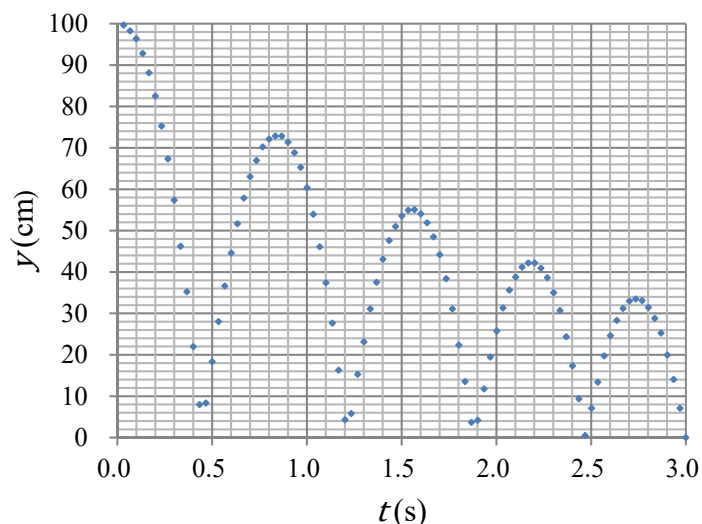


圖 2

三、砲兵以仰角 θ 射擊一發榴彈砲，在前方之觀測士測得砲彈飛行在最高點時的瞬時速率為 v ，而當砲彈繼續飛行到高度為最高點之高度的一半時，測得之瞬時速率為 $2v$ 。不計空氣阻力，則發射砲彈時砲管之仰角 $\theta =$ (4) 度；而砲彈的射程為 (5) 。（設重力加速度 g ）

四、今年 9 月 14 日位於日本九州熊本縣的阿蘇火山突然爆發，從火山噴口算起，火山灰鉛直向上衝高 2000 m。已知火山口海拔高度為 1592 m，噴出的火山灰，相對於火山噴口，其速率呈現半球形均勻分布。若不計風力和空氣阻力的影響，計算火山灰從火山口噴出的最大速率為 (6) m/s；又噴出的火山灰降落在海拔高度為 300 m 山腳平地上，則火山灰覆蓋在山腳地面上的圓形面積半徑為 (7) m。（當地的重力加速度 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ）

五、截面積為 A 的水塔內，有密度為 ρ 、深度為 H 的液體；水塔底部接著一根水平方向的水管，其長度為 L 、截面積為 a ，且 $a \ll A$ ，如圖 3 所示。水管連接水塔處（即 S 點）的壓力為 P_S ，另一端壓力為大氣壓力為 P_0 。液體的黏滯係數為 η ，其單位為 $\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$ 。在穩流的情形下，水管兩端的壓力差 $P_S - P_0$ 與黏滯係數 η 、和水管長度 L 成正比，而與水管中（含水管兩端）每單位時間流出的體積 Q （或稱為體積流率）、截面積 a 的關係為 $(P_S - P_0) = 8\pi \eta L Q^\alpha a^\beta$ ；式中 α 與 β 皆為常數，則 $\beta =$ (8)。已知在水管以外的地方黏滯力皆可忽略，試求水管中液體的流速 $v =$ (9)。

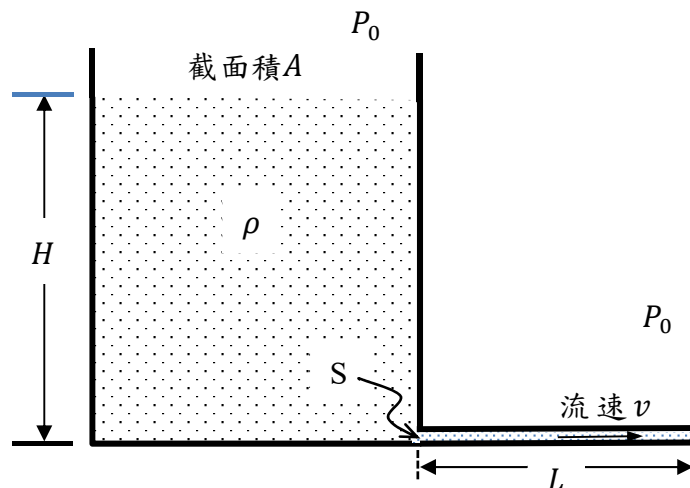


圖 3

- 六、如圖 4(a)所示，某生將兩水平截面積與體積皆相同、密度各為 ρ_1 與 ρ_2 之方形板塊，以膠水黏結後浸入於某一液體中，發現黏結後的板塊可靜止平衡在液體內任一點，則液體的密度為____(10)____。若黏結前兩方形板塊之厚度皆為 h ，今將黏結後之板塊自離液面高度 h_0 處($h < h_0 < 2h$)由靜止釋放(如圖 4(b)所示)，液體的流動、阻力與表面張力可忽略不計，則板塊第一次恰完全沒入液體的時間為____(11)____。(設重力加速度為 g)

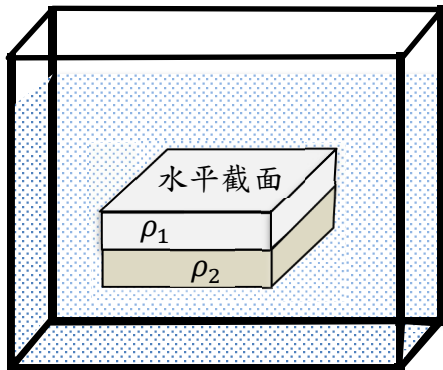


圖 4(a)

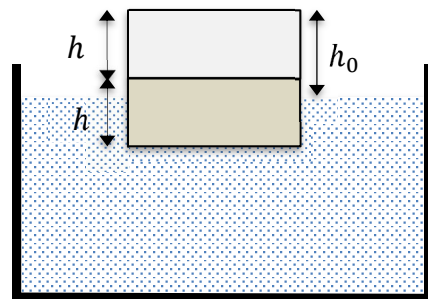


圖 4(b)

- 七、一個鉛直放置之絕熱汽缸，其活塞面積為 A 、質量為 m 。汽缸內有 n 莫耳單原子之理想氣體，設活塞與汽缸之間的摩擦力可以不計。起始時，汽缸內氣體與活塞處於平衡狀態，其絕對溫度為 T_0 ，氣體常數為 R ；已知汽缸外大氣壓力為 P_0 ，則活塞內面與汽缸底面之距離為____(12)____。現在施外力，極緩慢地將活塞內面與汽缸底面之距離改變成 h ，求汽缸內氣體的溫度 $T(h) =$ ____(13)____。

【提示】：積分公式： $\int \frac{dx}{x} = \ln x$ 。

- 八、一個高度為75公分的圓柱形絕熱量熱器內，底部裝有25公分高的冰；再迅速將溫度為 10°C 的水注入此量熱器，使得水面高度到達50公分，如圖5所示。若冰一直固定於量熱器的底部，當溫度穩定後，在一大氣壓下，測得水面高度增加了0.5公分，則注入水之前，量熱器內冰的溫度是(14) $^{\circ}\text{C}$ 。
- 已知冰的密度： $0.9 \rho_{\text{water}}$ ；冰的熔解熱： 340 kJ/kg ；冰的比熱： $2.1 \text{ kJ/(kg}\cdot\text{K)}$ ；水的比熱： $4.2 \text{ kJ/(kg}\cdot\text{K)}$ 。

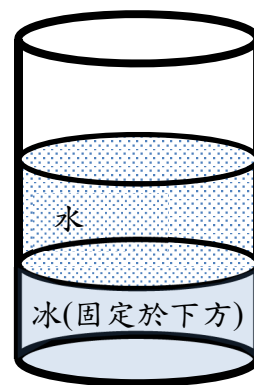


圖5：絕熱量熱器

- 九、如圖6所示，一個具冷卻功能的簡易系統，包含兩個同心之半球形容器1和容器2，其半徑分別為 R_1 、 R_2 ($R_2 > R_1$)。容器1之頂蓋與外界大氣之單位長度熱傳導係數為 κ_1 ，其半球形表面單位長度熱傳導係數為 κ_2 。內裝有水的容器2，半球形表面為絕熱，水與空氣介面間的單位長度熱傳導係數為 κ_3 ，假設冷卻效應僅考慮水在自由面上蒸發，即水空氣的接觸面。已知水蒸發在單位時間內從每單位面積帶走 η 的熱量。若外界溫度 T 為定值，而系統達到穩態時，容器1內的溫度是 T_1 與容器2的水溫為 T_2 ，則以下列何種方式調整 κ_1 、 κ_2 ，才能使 T_1 的溫度降到最低？(15) (以A、B、C和D作答)。

A: 提高 κ_1 及 κ_2 ，B:降低 κ_1 及 κ_2 ，C:提高 κ_1 ，降低 κ_2 ，D:提高 κ_2 ，降低 κ_1 。

當外界溫度 T 為定值，且系統達到穩態時， $T_1 - T_2 =$ (16)。

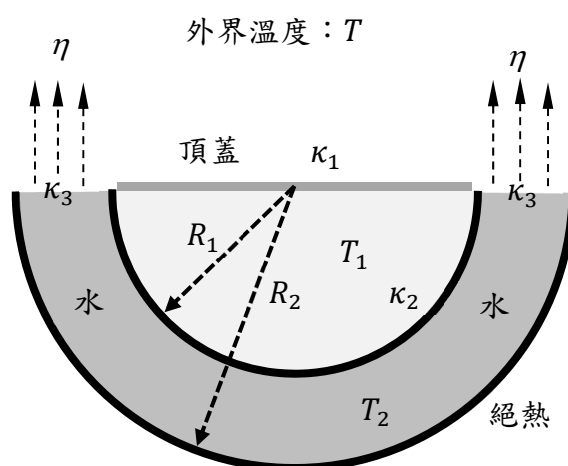


圖6

- 十、在一般固體材料中熱主要是以傳導方式傳播，有些固體(如放射性物質)除了傳導熱量外，本身也會產生熱量，而所產生的熱量也是透過熱傳導方式傳播出去。今有一此類材料所製之半徑為 R 之固體球體，假設球體中單位體積之熱量產生率為 s (單位為 W/m^3)，試問當球體內每一點溫度達穩定平衡時，每秒由半徑 r ($r < R$)之球面傳

播出去的熱量為____(17)____。假設此材料之熱傳導係數為 κ ，則溫度達穩定平衡時，球心與球面之溫度差為____(18)____。

【提示】：積分公式 $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ， $n \geq 0$ 。

- 十一、 如圖 7 所示，長度為 $2L$ 的均勻長方體平板，靜止置於水平地面上。當時間 $t = 0$ 時，質量為 m 的小孩在平板右端，由靜止開始，沿平板表面的中分線，走到平板最左端，然後停在平板上。假設以平板中點 O 為座標系原點，且選定正 x 軸方向為水平向右。當時間 t 趨近無窮大時：(A)若平板與地面之間無摩擦力，則平板的水平位移為____(19)____。(B)若平板與地面之間的摩擦力與平板的速度成正比，則平板的水平位移為____(20)____。

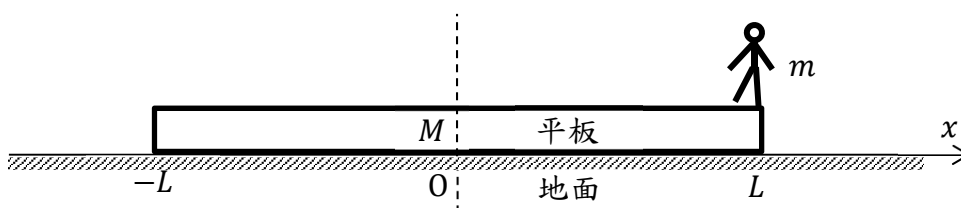


圖 7

- 十二、 (A) 質量 m 的小方塊，初始時置於固定斜面頂端。斜面高 h ；傾角為 θ ，且方塊的初速為 v_0 ，方向沿斜面向下，如圖 8(a)所示。若方塊與斜面間的動摩擦係數為 μ_k ，則當方塊到達斜面底端時，動摩擦力所作的功為____(21)____。(設重力加速度為 g)
(B) 若將斜面改為一半徑為 R 的圓弧面，圓弧面的圓心在底端的正上方，如圖 8(b)所示。方塊沿著圓弧面下滑，動摩擦係數仍為 μ_k ，當滑到最低處時速度恰為零，若 $h/R \ll 1$ ，即忽略向心力的影響，利用(A)的做法，求 $v_0^2 =$ ____(22)____ (以 μ_k 、 h 、 R ，表示之)。

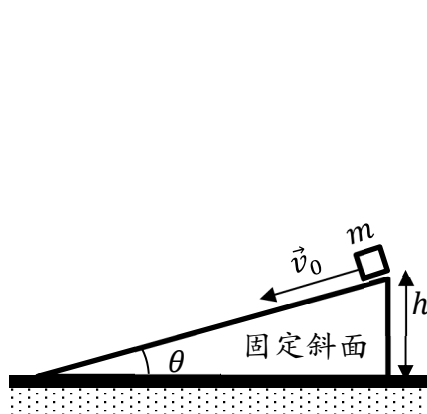


圖 8(a)

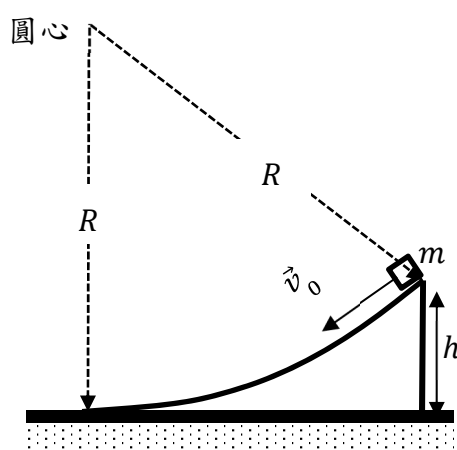


圖 8(b)

- 十三、 在外太空中有一艘子母太空船，已知子太空船質量為 m ，母太空船質量為 $4m$ ，當子、母太空船的距離為 d ，子太空船以速率 v_0 相對母太空船離開，且完全脫離母太空船重力之影響，試問 v_0 至少應為____(23)____。(設重力常數為 G)

十四、考慮地震發生時的水平方向振動，使地板上的物體水平搖擺作簡諧運動，若測得物體的振幅為 5 公分，週期為 1 秒，則該物體的最大加速度量值約為 (24) 公尺/秒² (取 1 位有效數字即可)。在書架上的書本與水平架板間靜摩擦係數需大於 (25)，書本才不會因此地震而滑動？(取重力加速度 $g = 10 \text{ m/s}^2$)

十五、有一自然長度為 l 、力常數為 k 的輕質彈簧，上端固定於天花板，下端繫著長度亦為 l 、且無彈性的輕質細繩，細繩下端再繫有一質量為 m 的質點，受重力自然下垂如圖 9。重力加速度為 g ，則在初始靜力平衡時，以外力將質點垂直下拉後釋放，使質點開始上下振盪。(A)若振盪過程中細繩始終保持拉直的狀態，則振盪的最大振幅為 (26)。(B)若在初始靜力平衡時，給質點一個向上的初速 v ，使得質點在之後的過程中可以觸及彈簧的下端，則該 v 的最小值為 (27)。

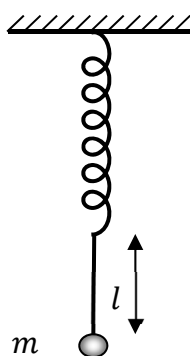


圖 9

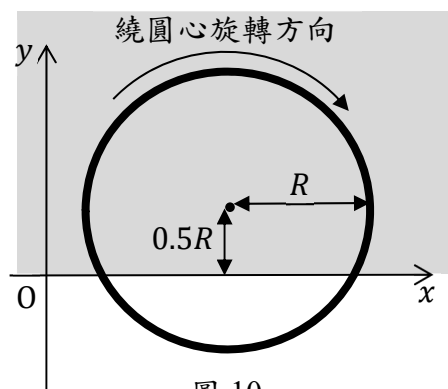


圖 10

十六、如圖 10 所示，一均勻圓環，半徑為 R ，質量為 M ，放置於水平的平面上，設此平面為 $x-y$ 面。平面上以 x 軸為分界，兩邊的區域各自都是均勻的。 $y > 0$ 的區域較粗糙，與圓環之間的動摩擦係數為 μ ，而 $y < 0$ 的區域很光滑，與金屬環之間的動摩擦力可以忽略。在某瞬間，此圓環的環心恰在 $y = 0.5R$ 處，圓環不平移，但繞通過圓心的垂直軸旋轉。此時圓環所受的總動摩擦力，其 y 軸方向的分量為 (28)，而 x 軸方向的分量為 (29)，動摩擦力對圓環所施的力矩（相對於圓環中心）為 (30)。

計算題（每題 15 分，共二題，合計 30 分）

一、如圖 11 所示，在裝有單原子理想氣體的低壓真空容器內，有兩片固定不動、彼此平行的正方形平板 A 與 A' ，兩板沿 x 方向之間隔 d 遠小於氣體分子之平均自由行程（即原子在連續兩次碰撞之間行進的平均距離）。兩板內側（相向）表面的溫度，分別維持於固定的絕對溫度 T 與 T' 。假設氣體分子在撞擊內側板面後，立即以板面分子

熱運動的平均速率，垂直板面反彈(此處假設表面分子只沿 $\pm x$ 方向有熱運動，且能量均分定理成立)，而兩板面均大到邊緣效應可以忽略。已知兩板間氣體分子數目的分布達到穩態，每個原子的質量為 m ，波茲曼常數為 k ，在每單位時間內，通過單位橫截面積(在 $y-z$ 平面)，沿 $+x$ 方向由A往A'的氣體分子個數平均為 n ，而沿 $-x$ 方向由A'往A的氣體分子個數平均為 n' ，則

- 比值 n'/n 為何？(5 分)
- 兩板間橫截面(在 $y-z$ 平面)受到的平均壓力為何？(5 分)
- 每單位時間內、每單位面積由A板傳到A'板上的熱量為何？(5 分)

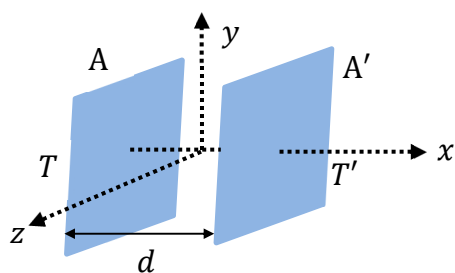


圖 11

二、一均勻實心球質量為 m 、半徑為 R ，由桌子邊緣P點滾下，如圖 12 所示，座標 x 軸向右為正， y 軸向上為正，球心為O，OP 連線與 x 軸夾角為 θ 。圖中虛線為初始靜止位置，球恰可沿P點滾下。已知滾動下落過程中，球與桌緣接處點P之間沒有相對移動(即無滑動)，設重力加速度為 g ，則

- 滾動下落過程中，相對於P點而言，球的角加速度為何？(逆時針方向為正)。
- 滾動下落過程中，球和桌緣P點間的摩擦力大小為何？
- 滾動下落過程中，球所受到的正向力大小為何？
- 當球剛要脫離桌子邊緣的時候，OP 連線與 x 軸夾角 θ 為何？

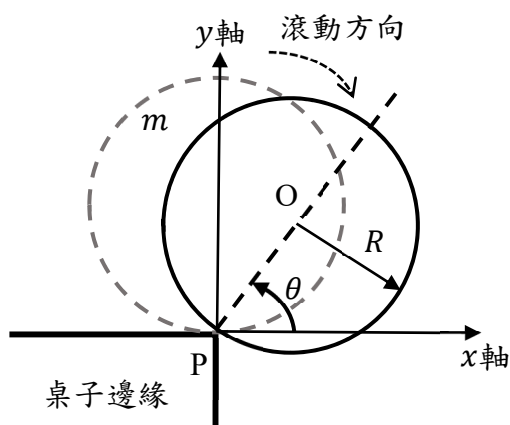


圖 12：

註：當質量為 m 的物體進行純轉動運動時，若轉動軸距離質心為 d ，則相對於此轉動軸的轉動慣量為 $I_{cm} + md^2$ ，其中 I_{cm} 為通過質心轉動軸的轉動慣量，對半徑為 R 的實

心球而言，其 I_{cm} 等於 $\frac{2}{5}mR^2$ 。

2016 年第 17 屆亞洲物理奧林匹亞競賽
及第 47 屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊初選考試試題參考解答

壹、 填充題

一、 (1) D

二、 (2) 169 cm/s (誤差 2 cm/s 均可)

(3) 0.854 (誤差 0.002 均可)

三、 (4) 67.8°

(5) $2\sqrt{6}\frac{v^2}{g}$

四、 (6) 198m/s

(7) 5132m

五、 (8) $\beta = -2$

(9) $v = \sqrt{2gH + \left(\frac{8\pi\eta L}{a\rho}\right)^2} - \left(\frac{8\pi\eta L}{a\rho}\right)$

六、 (10) $(\rho_1 + \rho_2)/2$

(11) $\pi\sqrt{\frac{h}{2g}}$

七、 (12) $\frac{nRT_0}{(P_0A + mg)}$

(13) $T = T_0 \left[\frac{nRT_0}{(P_0A + mg)h} \right]^{2/3}$

八、 (14) -54

九、 (15) D

(16) $\frac{\eta(R_2^2 - R_1^2)}{R_2^2\kappa_3(\kappa_1 + 2\kappa_2) + R_1^2(2\kappa_1\kappa_2 - \kappa_1\kappa_3 - 2\kappa_2\kappa_3)}$

十、 (17) $\frac{4\pi}{3}sr^3$

$$(18) \quad \underline{\frac{sR^2}{6\kappa}}$$

十一、 (19) $\underline{\frac{2m}{m+M}L}$

(20) $\underline{0}$

十二、 (21) $\underline{\mu_k mgh \cot \theta}$

(22) $\underline{2g \left[\mu_k \sqrt{2hR - h^2} - h \right]}$ 或 $\underline{2g \left[\mu_k \sqrt{2hR} - h \right]}$ 或 $\underline{2g \left[\mu_k \sqrt{2hR} \right]}$

十三、 (23) $\underline{v \geq \sqrt{\frac{10Gm}{d}}}$

十四、 (24) $\underline{2}$

(25) $\underline{0.2}$

十五、 (26) $\underline{\frac{mg}{k}}$

(27) $\underline{\sqrt{2gl + \frac{mg^2}{k}}}$

十六、 (28) $\underline{0}$

(29) $\underline{\frac{\sqrt{3}Mg\mu}{2\pi}}$

(30) $\underline{\frac{2}{3}Mg\mu R}$

貳、計算題

第 1 題評分標準：

小題	內容	得分	備註
(1) 5 分	到穩定態時，可以利用流體的連續性方程式，	2	
	知道每單位時間內，每單位面積上撞擊板面與自板面反彈的分子個數必須相等，	2	
	寫出 $n = n'$ ，即 $n'/n = 1$ 。	1	
(2) 7 分	知道單位時間內，yz 平面上每單位面積受到的動量為 $nmv + n'mv'$ ，(即壓力 p)	1	
	寫出 $p = nmv + n'mv' = m(nv + n'v')$	2	
	知道能量均分定理，即速率 v 與溫度 T 相關之關係式。(三維運動為： $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT$)	2	
	了解是一維運動，寫出 $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kT,$ 和(或) $\frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}kT'。$	1	
	計算出壓力： $p = \sqrt{mk}(n\sqrt{T} + n'\sqrt{T'})$ 或 $p = n\sqrt{mk}(\sqrt{T} + \sqrt{T'})$	1	
(3) 3 分	理解單位時間內每單位面積能量流為粒子數 n 乘以平均動能，平均動能為 $\frac{1}{2}kT$	2	
	計算出單位時間內每單位面積流入之靜能量 $n \times \frac{1}{2}kT - n' \times \frac{1}{2}kT' = n \times \frac{1}{2}nk(T - T')$ 或是僅考慮由 T 傳到 T' 的能量 $n \times \frac{1}{2}kT$ 亦可。 (因未題意述說不明確)	1	

第 2 題評分標準：

小題	內容	得分	備註
(1) 4 分	知到相對於 P 點的力矩大小為 $mgR \cos \theta$ ，	1	
	等於相對於 P 點的轉動慣量 I 與角加速度 α 的乘積，寫出 $I\alpha = -mgR \cos \theta$ ，	1	
	寫出轉動慣量 I 等於 $\frac{7}{5}mR^2$	1	
	計算得角加速度為 $-\frac{5g}{7R} \cos \theta$	1	沒有負號， 不給分。
(2) 4 分	寫出力方程式： $ma = mg \cos \theta - F_f$ ， 其中 a 為球質心加速度，	2	
	知道純滾動條件，即： $a = R\alpha$	1	
	寫出方程式 $F_f = mg \cos \theta - mR \left(\frac{5g}{7R} \cos \theta \right)$ 計算出摩擦力 $F_f = \frac{2}{7}mg \cos \theta$	1	只需考慮大小
(3) 5 分	知道正向力 F_N 是沿著 OP 連線，	1	
	寫出正向力的力方程式： $mg \sin \theta - F_N = mR\omega^2$ ， 或 $F_N = mg \sin \theta - mR\omega^2$ 其中 ω 是質心相對於 P 點的轉動角速率，	1	
	知道能量守恆知轉動動能是由重力位能而來，即 $mgR(1 - \sin \theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{7}{5}mR^2 \right) \omega^2$ 得 $\omega^2 = \frac{10g}{7R} (1 - \sin \theta)$	2	
	計算出正向力 $F_N = \frac{mg}{7} (17 \sin \theta - 10)$	1	
(4) 2 分	寫出球脫離桌子邊緣滑落時， F_N 等於零，即 $(17 \sin \theta - 10) = 0$	1	

	計算出角度 $\sin^{-1} \frac{10}{17} = 36 \text{ 度}$	1	
--	---	---	--